

УДК 517

Л.Н. ТЕМИРБЕКОВА, Н. ШАХИБАДИНҚЫЗЫКазахский национальный педагогический университет имени Абая,
институт математики, физики и информатики, г. Алматы, Казахстан**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА**

В данной работе рассматриваются численные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений. В обратной задаче требуется восстановить коэффициент по дополнительной информации о решении прямой задачи. Для численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана, который является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, применяются метод регуляризации Лаврентьева, прямой метод квадратного корня и метод сопряженных градиентов. Показана эффективность разработанного численного метода сопряженных градиентов.

Ключевые слова: уравнение, схема, аппроксимация, устойчивость, сходимость, регуляризация, погрешность.

ГЕЛЬФАНД-ЛЕВИТАН ТЕНДЕУІН САНДЫҚ ӘДІСТЕРМЕН ШЕШУ

Бұл жұмыста гиперболалық типті кері тендеулерді шешудің сандық әдістері қарастырылған. Кері есепте тура есептің шешімінен алынған қосымша ақпарат арқылы коэффициентті табу қажет. Бірінші реттік Фредгольм тендеуі болып есептелінетін интегралдық Гельфанд-Левитан тендеуін сандық шешу үшін Лаврентьев регуляризация әдісі, квадрат түбірлер тура әдісі және түйіндес градиенттер әдісі қолданылады. Түйіндес градиенттер сандық әдісінің тиімділігі көрсетілген.

Түйін сөздер: тендеу, схема, аппроксимация, тұрақтылық, жинақтылық, регуляризация, қателік.

**NUMERICAL METHOD OF SOLVING
GELFAND-LEVITAN INTEGRAL EQUATION**

In the given work we consider numerical methods of solving inverse problems for hyperbolic equations. It is necessary to restore the coefficient of extra information about solving direct problem in the reverse one. To solve numerically Gelfand-Levitan integral equation, which is Fredholm integral equation of first kind, they use Lavrentiev regularization method, direct square root method, and conjugate gradient method. We present the effectiveness of developed numerical conjugate gradient method.

Keywords: equation, scheme, approximation, stability, convergence, regularization, error.

Математической предпосылкой развития теории коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений послужила работа И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [1]. В этой работе решение обратной задачи сводится

к решению линейного интегрального уравнения, называемого впоследствии уравнением Гельфанда-Левитана. Важные результаты были также получены М.Г. Крейном [2] и В.А. Марченко [3]. Монографии Б.М. Левитана [4] и М.Г. Крейна [5] посвящены обратной задаче Штурма-Лиувилля. В работах Б.С. Парийского [6] предложены экономичные методы численного решения уравнений Фредгольма второго рода в свертках с положительно определенным ядром. В монографии Кабанихина С.И. [7] изложены результаты изучения прямой и обратной задачи с распределенными начальными данными, задача с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа. Доказана разрешимость в целом обратной задачи для уравнения гиперболического типа. Решение обратной задачи приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, которое является некорректным. В работе С.И. Кабанихин и Г.Б. Баканов [8] был исследован дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения.

Данная работа посвящена разработке численных методов решения коэффициентной обратной задачи с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа входящих в вышеприведенные группы. При использовании схем регуляризации М.М. Лаврентьева или А.Н. Тихонова приближенное решение находится из систем уравнений с положительно определенной и хорошо обусловленной матрицей. Разработан и численно реализован итерационный метод с регуляризацией М.М. Лаврентьева. Показано, что наиболее оптимальный из градиентных методов решения операторного уравнения – метод сопряженных градиентов.

Постановка задачи и численное решение прямой задачи

Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения $u(x, t)$ задачи Коши [7]

$$u_{,tt} = u_{,xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x) \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2)

$$u(0, t) = r(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Задача (1), (2) с начальным условием в виде дельта – функции поставлена для нахождения обобщенного решения. Согласно изложенным в работах [6, 7] результатам прямая задача (1)-(2) эквивалентна следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - q(x)u, \\ u|_{t=0} = \frac{1}{2}, \quad |x| \in [0, 2a]; \end{cases} \quad (4)$$

где $q(x)$ – заданная функция.

Рассмотрим область $D = \{-a < x < a, 0 < t < 2a\}$. Задача Гурса численно решается в области $D_1 = \{-a < x < a, |x| < t < 2a - |x|\}$, $D_1 \subset D$. Строим равномерную сетку D_{ht} приведенную на рисунке 1.

$$D_{ht} = \{(x_i, t_n) : x_i = -a + i \cdot h, i = 0, 1, \dots, N, h \in [0, 2a]; t_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, K, \tau \in [0, 2a]\}.$$

Гиперболическое уравнение (4) численно решается в области D_{ht} с помощью разностной схемы [7]:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - 0,5(q_{i+1} + q_{i-1}) \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}, \quad (5)$$

при $\tau = h$ получаем схему квадрат:

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1} - h^2 \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} \right), \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots, K. \quad (6)$$

Граничные условия для сеточной задачи

$$\begin{aligned} u_i^n &= 0,5; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad n = m, m-1, \dots, 1; \\ u_i^n &= 0,5; \quad i = m+1, m+2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots, m; \end{aligned} \quad (7)$$

Так как по формуле (6) значения решения по направлению t находятся в узлах кратных двум, другие значения находятся линейной интерполяцией по значениям решения в четырех соседних узлах.

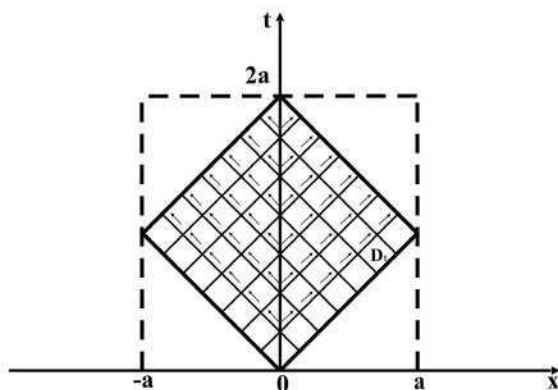


Рисунок 1 – Схема решения прямой задачи

Сведение коэффициентной обратной задачи к интегральному уравнению типа Гельфанда-Левитана. Метод регуляризации М.М. Лаврентьева

Необходимые и достаточные условия разрешимости в целом задачи (1)-(3) были предложены в работах Б.С. Парийского [6] и А.С. Благовещенского [9]. В монографии С.И. Кабанихина [7] построены интегральные уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода относительно искомой функции $\tilde{\omega}(x, t)$ которые связаны с коэффициентом $q(x)$ уравнения (1) с интегральным соотношением. В настоящей работе для численного решения рассмотрено только интегральное уравнение первого рода.

Согласно результатам, изложенным в монографии В.Г. Романова [10] для обратной задачи (1)-(3) выполняется интегральное уравнение Гельфанда-Левитана

$$\frac{1}{2}[r(t-x) + r(t+x)] + \int_{-x}^x r(t-\tau)\tilde{\omega}(x, \tau)d\tau = 0, \quad x > |t|. \quad (8)$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (8) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода относительно функции $\tilde{\omega}(x, t)$, $t \in (-x, x)$.

Функция $\tilde{\omega}(x, t)$ связана с коэффициентом $q(x)$ уравнения (1) следующим соотношением

$$\tilde{\omega}(x, x-0) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi)d\xi, \quad x > 0. \quad (9)$$

Перепишем уравнение (8) в операторной форме

$$A\tilde{\omega} = f. \quad (10)$$

Рассмотрим следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A\tilde{\omega}(x,t) = \int_{-x}^x r(t-\beta)\tilde{\omega}(x,\beta)d\beta = f(t) \quad |t| < x \quad (11)$$

где $\tilde{\omega}, f \in L_2(-x, x)$, а $r(t) \in L_2(0, 2x)$. Предположим, что $r(t)$ – вещественная функция и не симметрична. Тогда интегральный оператор

$$A\tilde{\omega}(x,t) = \int_{-x}^x r(t-\beta)\tilde{\omega}(x,\beta)d\beta$$

также будет не симметричным. Определим сопряженный к оператору A оператор A^* соотношением

$$A^*p(t) = \int_{-x}^x r(\xi-t)p(\xi)d\xi, \quad p(t) \in L_2(0, 2x).$$

Применим к уравнению (11) оператор A^* :

$$A^*A\tilde{\omega} = A^*f.$$

Оператор A^*A является симметричным интегральным оператором

$$A^*A\tilde{\omega}(x,t) = \int_{-x}^x r(\xi-t) \int_{-x}^x r(\xi-\beta)\tilde{\omega}(x,\beta)d\beta d\xi.$$

Ядро оператора A^*A симметрично

$$\tilde{K}(\beta,t) = \int_{-x}^x r(\xi-t)r(\xi-\beta)d\xi. \quad (12)$$

Наряду с уравнением (11) рассматривается регуляризованное уравнение

$$\alpha\tilde{\omega}(x,t) + A^*A\tilde{\omega}(x,t) = A^*f_\gamma(t), \quad (13)$$

где α - параметр регуляризации, $\gamma > 0$, $f_\gamma \in L_2(0, 2x)$.

Для решения строится следующее уравнение регуляризационным методом М.М. Лаврентьева

$$\alpha \tilde{w}(x, t) + A^* A \tilde{w}(x, t) = A^* f_\gamma(t). \quad (14)$$

где $f_\gamma(t) = f(t) + \alpha \tilde{w}^0(x, t)$, α – положительный параметр, $\tilde{w}^0(x, t)$ – пробное решение.

Регуляризованное уравнение (14) решается градиентными методами Ландвебера, сопряженных градиентов и прямым методом квадратного корня.

Метод сопряженных градиентов для некорректных задач

Для решения задачи (10) применяется метод сопряженных градиентов для некорректных задач [7]. Градиентные методы в каноническом виде записываются формулой

$$\tilde{w}^{n+1}(x, t) = \tilde{w}^n(x, t) - \alpha_n J' \tilde{w}^n(x, t), \quad \alpha_n > 0,$$

для которых параметр спуска α_n либо фиксирован, либо выбирается из условия минимума некоторого функционала качества $J(\tilde{w}(x, t)) = \|A \tilde{w}(x, t) - f\|^2$. Где градиент функционала $J(\tilde{w})$ имеет вид

$$J' \tilde{w}^n(x, t) = 2A^* (A \tilde{w}^n(x, t) - f).$$

Запишем градиент функционала в интегральной форме

$$J' \tilde{w}^n(x, t) = 2 \int_{-x}^x r(\xi - t) \int_{-x}^x r(\xi - \beta) \tilde{w}^n(x, \beta) d\beta d\xi - 2 \int_{-x}^x r(\xi - t) f(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Для численного решения уравнения (15) интеграл заменяется квадратурной формулой прямоугольников и полагая $t^{(j)} = j\Delta t$, $\Delta t = \frac{x}{n}$, $t = t^{(j)}$, $j = -n, -n+1, \dots, n$ получим матрицу $A_n^* A_n$ линейного оператора $A^* A$

$$A_h^* A_h = \begin{pmatrix} h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_n) \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})r(\xi_i - \beta_n) \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+2)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+2)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+2)})r(\xi_i - \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n-1)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n-1)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n-1)})r(\xi_i - \beta_n) \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_n) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Правая часть $A_h^* f(t) = \int_{-x}^x r(\xi - t) f(\xi) d\xi$ в дискретном виде

$$\overline{A_h^* f(t)} = \left(h \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)}) f(\xi_i), h \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)}) f(\xi_i), \dots, h \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)}) f(\xi_i) \right)^T. \quad (17)$$

Искомая сеточная функция $\tilde{\omega}_h(x, t)$

$$\tilde{\omega}_h(x, t) = \left(\tilde{\omega}_h(x, t^{(-n)}), \tilde{\omega}_h(x, t^{(-n+1)}), \dots, \tilde{\omega}_h(x, t^{(0)}), \tilde{\omega}_h(x, t^{(1)}), \dots, \tilde{\omega}_h(x, t^{(n)}) \right)^T.$$

Размерность матрицы $A_h^* A_h$ равна $(2n \times 2n)$.

Алгоритм реализации метода сопряженных градиентов [7]:

- 1) Задается начальное приближение $\tilde{\omega}_h^0(x, t)$;
- 2) Одношаговым итерационным методом вычисляется первое приближение $\tilde{\omega}_h^1(x, t) = \tilde{\omega}_h^0(x, t) - \alpha J' \tilde{\omega}_h^0(x, t)$;

- 3) Вычисляется $p_0 = J' \tilde{\omega}_h^0(x, t)$;

- 4) Вычисляется $p_n = J' \tilde{\omega}_h^n(x, t) - \frac{\|J' \tilde{\omega}_h^n(x, t)\|^2}{\|J' \tilde{\omega}_h^{n-1}(x, t)\|^2} p_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, s$;

$$5) \text{ Вычисляется итерационный параметр } \alpha_n = \frac{\|J' \tilde{\omega}_h^{n-1}(x, t)\|^2}{(A_h^* A_h p_n, p_n)} = \frac{\|J' \tilde{\omega}_h^{n-1}(x, t)\|^2}{\|A_h p_n\|^2};$$

$$6) \text{ Находится следующее приближение } \tilde{\omega}_h^{n+1}(x, t) = \tilde{\omega}_h^n(x, t) - \alpha_n p_n.$$

Метод квадратного корня

Метод предназначен для решения систем уравнений с симметричной матрицей [7-11]. Он основан на разложении симметричной матрицы $\alpha E + A_h^* A_h$ в произведении

$$\alpha E + A_h^* A_h = S^* D S \quad (18)$$

где S - верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, S^* - матрица, транспонированная к ней, D - диагональная матрица.

Для удобства элементы матрицы $\alpha E + A_h^* A_h$ обозначим через a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, m$ компоненты вектора $A_h^* f$ через f_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Если разложение (18) получено, то решение системы (14) сводится к последовательному решению двух систем уравнений с треугольными матрицами

$$S^* y = f, \quad (19)$$

$$D S \tilde{\omega} = y. \quad (20)$$

По следующим формулам находятся рекуррентно все ненулевые элементы матриц D и S . Диагональные элементы матриц S и D , s_{11} и d_{11} определяются по формулам [7-11]

$$d_{11} = \text{sign} a_{11}, \quad s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}, \quad d_{ii} = \text{sign} \left(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{il}|^2 d_{ll} \right), \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11} d_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, m,$$

В частности, при $i = j$ получаем

$$s_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} \right)^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1.$$

Далее, при $i < j$ имеем

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} \bar{s}_{li} s_{lj} d_{ll}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad j = i+1, \dots, m.$$

Последний диагональный элемент определяется по формуле

$$s_{mm} = \sqrt{a_{mm} - \sum_{l=1}^{m-1} s_{lm}^2 d_{ll}}.$$

Решения систем уравнений (19), (20) находятся по следующим формулам

$$y_1 = \frac{f_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ji} y_j}{s_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

$$\tilde{\omega}_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^m s_{ij} \tilde{\omega}_j d_{jj}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad i = m-1, m-2, \dots, \quad \tilde{\omega}_m = \frac{y_m}{s_{mm} d_{mm}}.$$

7. Анализ численных результатов

На основе предложенных методов решения коэффициентной обратной задачи по восстановлению коэффициента были разработаны эффективные алгоритмы численной реализации и написаны программные коды. Вычислительные эксперименты проводились для различных функций $q(x)$ в широком диапазоне параметра x . Результаты численных расчетов показывают непрерывную зависимость решения уравнения от изменения входных данных.

На рисунке 2 приведены результаты численного решения семейств интегральных уравнений Гельфанда-Левитана и их сравнение с точным решением

искомой функции $\tilde{\omega}_h(x, x)$.

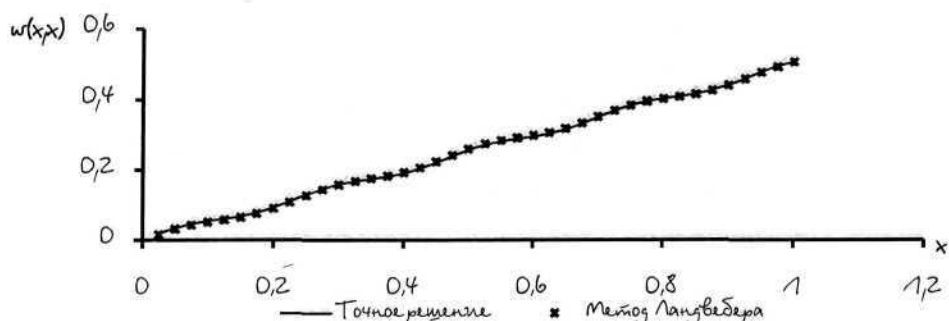


Рисунок 2 – График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определенный методом Ландвебера для функций $q(x) = 10 + \cos 27x$ при $n = 40$

Из формулы (9) дифференцируя, находится $q(x)$

$$q(x) = 4 \frac{d\tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx}, \quad x > 0. \quad (22)$$

Для нахождения сеточных значений функции $q(x)$ по найденным значениям функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ в формуле (22) производную от непрерывной функций заменим левой разностной производной

$$\tilde{q}_h(x_i) \approx \frac{4(\tilde{\omega}_h(x_i, x_i) - \tilde{\omega}_h(x_{i-1}, x_{i-1}))}{h} + O(h), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad h = x_L/n, \quad (23)$$

которая имеет первый порядок аппроксимации. На рисунках 3, 4 приведены восстановленные функции $\tilde{q}_h(x)$. Результат показывает, что отклонение решения обратной задачи от заданного $q(x)$ составляет $\|q - \tilde{q}_h\|_{C_h} = 0,33226$.

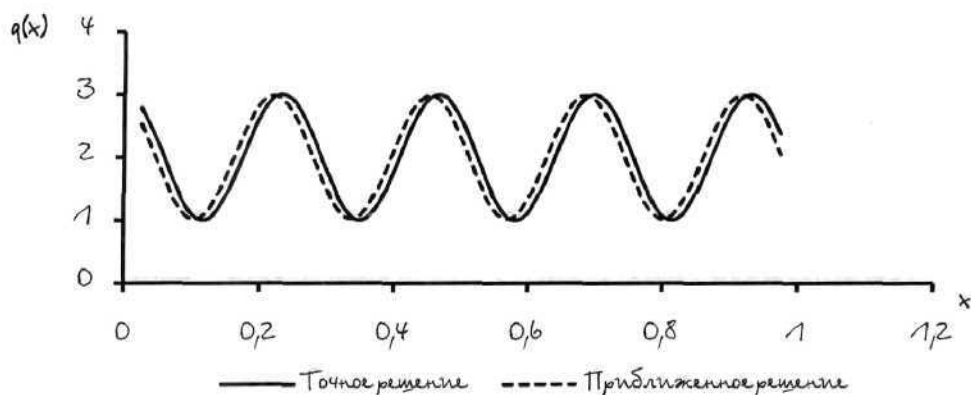


Рисунок 3 – График функций $q(x) = 10 + \cos 27x$, восстановленный методом сопряженных градиентов при $n = 40$

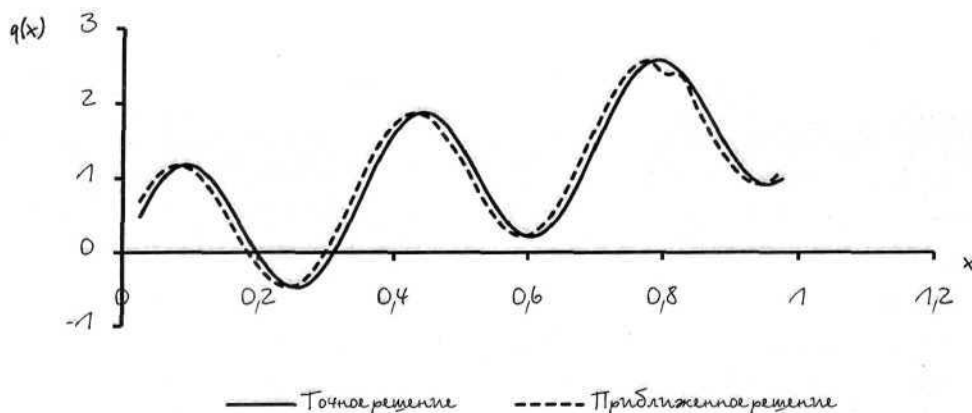


Рисунок 4 – График функций $q(x) = 4x + \sin 18x$, восстановленный методом сопряженных градиентов при $n = 40$

Результаты расчетов разными методами сведены в таблицу 1. Приведены результаты сравнения трех численных методов по таким параметрам, как количество итерации, норма погрешности и затраченное машинное время.

Таблица 1 – Сравнительный анализ численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана различными методами при количестве узлов сетки $n=100$, $\alpha = 0.0001$

| Методы | Количество итерации | Норма погрешности $\ \tilde{a}_T - \tilde{a}_{n,p}\ $ | Количество машинного времени | Сходимость |
|------------------------------|---------------------|--|------------------------------|------------|
| Метод Ландвебера | 1413 | 3,8036578E-03 | 19,44 сек | сходится |
| Метод сопряженных градиентов | 59 | 0,0990453E-05 | 11 мин 9,33 сек | сходится |
| Метод квадратного корня | - | 3,2112002E-05 | 11 мин 12,65 сек | сходится |

Результаты расчетов показывают, что метод сопряженных градиентов является наиболее эффективным из тех методов, которые были реализованы, т.к. матрица системы является симметричной и сходится за малое количество итераций. Сравнительный анализ показывает, что для численного решения рассматриваемого класса обратных задач использование метода сопряженных градиентов позволяет тратить меньшие машинные ресурсы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Изв. АН, сер. мат. – 1951. – Т. 15. – С. 309-360.
2. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 94. – №6. – С. 767-770.
3. Аникиев Д.В. Точный динамический метод решения обратной задачи сейсмологии на основе интегральных уравнений Гельфанда-Левитана / Д.В. Аникиев, Б.М. Каштан, А.С. Благовещенский, В.А. Мулдер // Вопросы геофизики. Вып. 44. – СПб., 2011-(Ученые записки СПбГУ; №444). – С. 49-81.
4. Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 76. – №1. – С. 21-24.
5. Парийский Б.С. Обратная задача для волнового уравнения с воздействием на глубине. В кн.: Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии / Б.С. Парийский. – М.: Наука, 1968. – С. 139-169 (Вычисл. сейсмология; Вып. 4).
6. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство / С.И. Кабанихин. – Новосибирск, 2009. – 457 с.
7. Кабанихин С.И. Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения / С.И. Кабанихин, Г.Б. Баканов // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40. – №2. – С. 307-324.

REFERENCES

1. Gel'fand I.M., Levitan B.M., *Ob opredelenii differencial'nogo uravnenija po ego spektral'noj funkcii. Izv. AN, ser. matem., 1951, 15, 309, 360 (in Russ).*
2. Krejn M.G., *Ob odnom metode jeffektivnogo reshenija obratnoj kraevoj zadachi. Dokl. AN SSSR. 1954. T. 94, 6, 767, 770 (in Russ).*
3. Anikiev D.V., Kashtan B.M., Blagoveshhenskij A.S., Mulder V.A., *Tochnyj dinamičeskij metod reshenija obratnoj zadachi sejsmiki na osnove integral'nyh uravnenij Gel'fanda-Levitana. Voprosy geofiziki. Vypusk 44. SPb., 2011, Uchenye zapiski SPbGU, 444, 49, 81 (in Russ)*
4. Krejn M.G., *Reshenie obratnoj zadachi Shturma-Liuvilija. Dokl. AN SSSR. 1951. T. 76, 1, 21, 24 (in Russ).*
5. Parijskij B.S., *Obratnaja zadacha dlja volnovogo uravnenija s vozdejstviem na glubine. V kn. Nekotorye prjamyje i obratnye zadachi sejsmologii. M. Nauka, 1968, 139, 169. Vychisl. Sejsmologija. Vyp. 4. (in Russ).*
6. Kabanihin S.I., *Obratnye i nekorrektnye zadachi. Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, Novosibirsk, 2009, 457 (in Russ).*
7. Kabanihin S.I., Bakanov G.B., *Diskretnyj analog metoda Gel'fanda Levitana v dvumernoj obratnoj zadache dlja giperbolicheskogo uravnenija. Sibirskij matematičeskij zhurnal, 1999, 40, 2, 307, 324 (in Russ).*

УДК 550.3

Л.Н. ТЕМИРБЕКОВА, Н. ШАХИБАДИНҚЫЗЫ, М.У. ШАМЕТОВ

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
институт математики, физики и информатики, г. Алматы, Казахстан

**ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ АССОЦИАЦИЙ
ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРОЯВЛЕННЫХ
В РУДНОАЛТАЙСКОМ И КАЛБИНСКОМ РЕГИОНАХ**

В данной работе приведены результаты экспедиционных исследований по геохимии и минералогии рыхлых отложений месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы. В инженерной лаборатории проведены аналитические исследования ИСР-MS спектроскопии отобранных проб на 70 элементов. Полученные числовые данные обработаны и проанализированы с помощью программных продуктов. Разработана математическая модель и метод численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли.

Ключевые слова: геохимия, Калба, Алтай, регуляризация, аномалия, уравнение.

**КЕНДІ АЛТАЙ ЖӘНЕ ҚАЛБА АУМАҚТАРЫНДАҒЫ ХИМИЯЛЫҚ
ЭЛЕМЕНТТЕРДІҢ ТАБИҒИ АССОЦИАЦИЯЛАРЫНЫҢ ӨЗГЕРІСІН ТАБУ**

Бұл жұмыста Кенді Алтай және Қалба пайдалы қазбалар борпылдақ шөгінділерінің кен орындарының геохимиялық және минералогиялық экспедициялық зерттеулерінің нәтижелері берілген. Инженерлік лабораторияда жиналған сынамаларға 70 химиялық