УДК 517.958

А.А. КРЫКПАЕВА[1], Е.К. ЕРГАЛИЕВ[2]

[1]Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан
[2]Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе были рассмотрены определения, условия корректно поставленной задачи, количественные оценки, геометрическая интерпретация понятия обусловленности. На протяжении всей работы можно проследить необходимые знания для решения систем матричных уравнений.

Ключевые слова: вектор, квадратная матрица, норма, линейная алгебра, численные методы.

СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ КЕЛІСІЛГЕНДІГІ

Аталған жұмыста орынды қойылған есептің анықтамасы, шарттары, сандық бағамдары, келісілгендік ұғымының геометриялық интерпретациясы қарастырылған. Жұмыс барысында матрицалық теңдеулер жүйесін шешуге қажетті білімдерді байқауға болады.

Түйін сөздер: вектор, квадраттық матрица, норма, сызықтық алгебра, сандық тәсілдер.

THE CONDITIONALITY OF A SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

In this work, we have considered the definitions of terms correctly assigned tasks, assessments, geometric interpretation of the concept of conditionality. Throughout the work one can trace the necessary knowledge for the solution of systems of matrix equations.

Key words: vector, square matrix, norm, linear algebra, numerical methods.

Линейная алгебра, численные методы – раздел вычислительной математики, посвященный математическому описанию и исследованию процессов численного решения задач линейной алгебры.

Среди задач линейной алгебры наибольшее значение имеют две: решение системы линейных алгебраических уравнений, определение собственных значений и собственных векторов матрицы. Другие часто встречающиеся задачи: обращение матрицы, вычисление определителя и т.д.

Любой численный метод линейной алгебры можно рассматривать как некоторую последовательность выполнения арифметических операций над элементами входных данных. Если при любых входных данных численный метод позволяет найти решение задачи за конечное число арифметических операций, то такой метод называется прямым. В противоположном случае численный метод называется итерационным, то есть если определяется не само решение задачи, а некоторая последовательность векторов.

Итак, пусть требуется найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$A \cdot x = в \tag{1}$$

Напоминаем, что в (1) A - квадратная матрица $n\times n$ с вещественными коэффициентами a_{ij}, $i, j=1,...,n$; $в$ - заданный вектор-столбец с вещественными n-компонентами, x-искомый вектор-столбец с n-компонентами.

Прежде чем искать какой-либо метод решения задачи (1), следует убедиться в том, что эта задача поставлена корректно.

Будем говорить, что задача поставлена корректно, если

1) решение задачи существует;

2) единственно; (2)

3) непрерывно зависит от входных данных.

Как известно, для задачи (1) первые два требования в определении (2) будут выполнены, если

$$\det|A| \neq 0 \tag{3}$$

Третье же требование в (2) применительно к задаче (1) нуждается в некоторой детализации. Входными данными в задаче (1) являются коэффициенты a_{ij} матрицы A и компоненты вектора $в$. Естественным является предположение, что a_{ij} и $в$ заданы с некоторой погрешностью δa_{ij} , $\delta в$. Но тогда вместо (1) мы на самом деле имеем задачу

$$(A+\delta A)\cdot(x+\delta x)=в+\delta в \tag{4}$$

Естественно поставить вопрос о том, как связана погрешность решения δx с $\delta в$ или δA. Ниже мы дадим количественную характеристику подобных связей. Для этого придется напомнить некоторые определения.

Нормой вектора x назовем поставленное в соответствие этому вектору неотрицательное число $\|x\|$ такое, что [1]

1) $\|x\| \succ 0$ при $x \neq 0$, $\|0\| = 0$,

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha = const$,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В качестве нормы вектора x очень часто будет использоваться

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \tag{5}$$

Норму (5) иногда называют сферической на том основании, что совокупность векторов, для которых $\|x\| \leq 1$, заполняет сферу единичного радиуса. Возможные и иные способы введения нормы вектора. Например:

$$\|x\| = \max|x_i|, i = 1,..., n. \tag{6}$$

Совокупность векторов, для которых норма вектора в смысле определения (6) меньше или равна единице, заполняет куб

$$-1 \leq x_i \leq 1, i = 1,2,..., n.$$

Нормой квадратной матрицы A назовем поставленное в соответствие этой матрице неотрицательное число $\|A\|$ такое, что

1) $\|A\| \succ 0$ при $A \neq 0$, $\|0\| = 0$,

2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, $\alpha = const$,

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Норма матрицы, как и норма вектора, может быть введена различными способами. Если, например, рассматривать матрицу A как n^2 - мерный вектор с вещественными компонентами, то очевидны следующие обобщения сферической (5):

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2} \tag{7}$$

и кубической (6)

$$\|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}| \tag{8}$$

норм.

Пусть выбрана некоторая норма вектора. Если для любой матрицы A и для любого вектора x выполнено неравенство

$$\|A \cdot x\| \le \|A\| \cdot \|x\|, \tag{9}$$

то говорят, что норма матрицы согласована с нормой вектора. Если определить норму матрицы как

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \tag{10}$$

то введенная таким образом норма матрицы A будет наименьшей из всех норм, согласованных с данной нормой вектора. Существование максимума в (10) следует из непрерывности нормы.

Мы теперь в состоянии получить количественные оценки, связывающие погрешности $\delta в$, δA с погрешностью δx, и тем самым проанализировать третье требование в определении корректности (2). Сначала будем считать, что $\delta A=0$, а $\delta в \neq 0$. Тогда из (4) имеем [2]

$$A \cdot \delta x = \delta в, \ \delta x = A^{-1} \cdot \delta в$$

и, следовательно,

$$\| \delta x \| \le \| A^{-1} \| \, \| \delta в \| \tag{11}$$

связь между $\|\delta x\|$ и $\|\delta в\|$ установлена. В практических приложениях более естественна связь между нормами относительных погрешностей. Заметим, что поскольку

$$\| в \| \le \| A \| \, \| x \|, \tag{12}$$

то из (11), (12) вытекает, что

$$\|\delta x\| \cdot \|в\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|x\| \cdot \|\delta в\|, \tag{13}$$

поэтому,

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta в\|}{\|в\|} \quad . \tag{14}$$

Пусть далее *δв=0*, *δA≠0*. Будем дополнительно предполагать, что погрешность δA такова, что $\det|A+\delta A| \neq 0$. Из (4) получим

$$x + \delta x = (A+\delta A)^{-1} \cdot в \tag{15}$$

но тогда

$$\delta x = \left[(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\right] \cdot в \,. \tag{16}$$

Дальнейшее сводится к тождественным преобразованиям выражения в квадратной скобке (16). Именно

$$(A+\delta A)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}\delta A(A+\delta A)^{-1}$$

поэтому,

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(A+\delta A)^{-1}в.$$

Это вместе с (15) дает

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(x+\delta x) \tag{17}$$

Из (17) имеем

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \|x+\delta x\|$$

или

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{18}$$

В качестве следствий из (11), (18) отметим, что $\|\delta в\| \to 0$ либо $\|\delta A\| \to 0$

влечет за собой и $\|\delta x\| \to 0$. Это и означает непрерывную зависимость решения задачи (1) по входным данным. Поэтому, условия $\det|A| \neq 0, \quad \det|A+\delta A| \neq 0$ обеспечивают корректную постановку задачи (1).

Входящее в оценки (14), (18) число

$$\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{19}$$

называется числом обусловленности матрицы A. Прежде чем давать дальнейшие комментарии, связанные с $\nu(A)$, рассмотрим так называемую задачу на собственные значения [3]:

$$A\varphi = \lambda \varphi \tag{20}$$

Геометрический смысл этой задачи весьма прозрачен. Умножение матрицы A на вектор φ порождает новый вектор. Если этот новый вектор имеет то же самое направление, что и исходный, то он называется собственным вектором матрицы A. Задача нахождения всех собственных векторов φ_i, $i=1,...,n$ матрицы A и соответствующих этим векторам множителей пропорциональности λ_i (они называются собственными значениями матрицы A) приводит нас к (20).

Отметим далее, что любая норма матрицы A не меньше ее наибольшего по модулю собственного значения. Действительно, из (20) следует, что для любого λ

$$\|A\| \cdot \|\varphi\| \geq \|\lambda\varphi\| = |\lambda| \|\varphi\|.$$

Поэтому

$$\|A\| \geq \max|\lambda_A|.$$

Кроме того,

$$\|A^{-1}\| \geq \max\frac{1}{|\lambda_A|} = \frac{1}{\min|\lambda_A|}.$$

Значит,

$$\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \frac{\max|\lambda_A|}{\min|\lambda_A|} \geq 1. \tag{21}$$

Пусть $A=A^*$ (значок * означает транспонирование), так что $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда собственные значения матрицы A- вещественны, а собственные векторы $\varphi_1,...,\varphi_n$ образуют базис в арифметическом пространстве R^n. Можно считать, что этот базис ортонормирован, так что $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$ где δ_{km} - символ Кронекера. Разложим вектор x по базису φ_i:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i .$$

Тогда

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \varphi_{i.}$$

Определим норму вектора x в соответствии с (5), а согласованную с ней норму матрицы A в соответствии с (10). Тогда

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}, \qquad \|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 c_i^2}$$

и, следовательно,

$$\|A\| = \max_i |\lambda_i|.$$

Итак, для $A = A^*$

$$\nu(A) = \frac{\max|\lambda_A|}{\min|\lambda_A|}. \tag{22}$$

Формулы (21), (22) могут быть использованы для количественных оценок числа обусловленности $\nu(A)$.

Матрицы A, для которых $\nu(A)$ относительно велико, называются плохо обусловленными; это же название можно применять и к системе линейных алгебраических уравнений (1).

Для плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений недопустима, велика правая часть в неравенствах (14), (18) поэтому лишь очень малые погрешности входных данных задачи (1) гарантируют приемлемую относительную погрешность решения.

Проиллюстрируем это положение на конкретном примере. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}0000 & -7{,}0001 \\ 3{,}0000 & -7{,}0000 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Для оценки числа обусловленности этой матрицы воспользуемся оценкой (21). Как следует из (20), собственные значения матрицы A являются корнями характеристического уравнения

$$\det\left|A - \lambda E\right| = 0.$$

В данном случае будем иметь

$$\lambda^2 + 4\lambda + 0{,}0003 = 0.$$

Удерживая пять значащих цифр при вычислении λ_1, λ_2, получим:

$$\lambda_1 = -0{,}0001, \qquad \lambda_2 = -3{,}9999,$$

и поэтому

$$\nu(A) \geq 39999 \approx 4 * 10^4.$$

Рассмотрим теперь систему линейных алгебраических уравнений (1) с матрицей из (23). Нетрудно проверить, что если

$$в = \begin{pmatrix} 0{,}9998 \\ 1{,}0000 \end{pmatrix}, то \quad x = \begin{pmatrix} 5{,}0000 \\ 2{,}0000 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

а если

$$в = \begin{pmatrix} 1{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{pmatrix}, то \quad x = \begin{pmatrix} 0{,}3333 \\ 0{,}0000 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

Комментарии, как говорится, излишни. Но мы убедимся в том, что полученный результат довольно точно предсказан оценкой (14). За точное решение задачи (1) с матрицей (23) мы примем (24). Число обусловленности матрицы A положим равным $4 \cdot 10^4$. Тогда (норма вектора – сферическая), несмотря на малость

$$\frac{\|\delta в\|}{\|в\|} = 1{,}4143 \cdot 10^{-4},$$

относительная погрешность в решении недопустимо велика в точном соответствии с оценкой (14):

$$1{,}3569 = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \frac{\|\delta в\|}{\|в\|} = 5{,}6772.$$

В рассмотренном примере могло создаться неверное впечатление, что причиной плохой обусловленности задачи является малость определителя $\det|A|$. В каком то смысле это отражает истину, ибо известно, что

$$\det|A| = \lambda_1 \ldots \lambda_n .$$

Можно считать, что

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n|.$$

Если теперь зафиксировать λ_n и рассмотреть последовательность таких матриц A_k, для которых $|\lambda_{1k}| \to 0$, то $\det|A_k| \to 0, \quad \nu(A_k) \to \infty.$

Однако все же решающую роль в обусловленности играет не малость определителя сама по себе, а именно отношение $|\lambda_n|/|\lambda_1|$, т.е. величина разброса собственных значений матрицы *A*. Лучше всего это иллюстрирует следующий простой пример. Рассмотрим последовательность симметричных матриц $A_n, n = 2m, m = 1,2,...,$ таких, что собственными значениями матрицы A_n являются λ_1, λ_2, каждое из которых имеет кратность m. Тогда

$$\det|A_n| = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)^m, \qquad \nu(A_n) = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}.$$

Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \prec 1$, то величина определителя матрицы A_n может быть сделана меньше любого наперед заданного числа. В то же время число обусловленности любой такой матрицы A_n - постоянно [4].

Знание числа обусловленности или оценка числа обусловленности $\nu(A_n)$ позволяет проанализировать ситуацию, связанную с погрешностью округления чисел на ЭВМ. Двоичная форма записи числа *x* будет иметь вид:

$$x = \pm q^n \sum_{k=1}^{m} \beta_k q^{-k} = \pm q^n (\beta_1, ..., \beta_m). \tag{26}$$

В (26) $q = 2$ и $0 \le \beta_k \prec 2$. Тогда каждая компонента вектора *в* в правой части (1) или каждый элемент матрицы *A* округляется с относительной погрешностью *O(2^-m^)* . Оценки (14) и (18) дают

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \nu(A)\cdot O(2^{-m}), \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \le \nu(A)\cdot O(2^{-m}).$$

Поэтому на ЭВМ решение задачи (1) не может быть найдено с точностью большей, чем $\nu(A)\cdot O(2^{-m})$.

И в заключение мы дадим геометрическую интерпретацию понятия обусловленности. Пусть $A = A^*$; пусть $\varphi_1,...,\varphi_n$ - собственные векторы матрицы A, а $\lambda_1,...,\lambda_n$ - соответствующие этим векторам собственные значения. Рассмотрим задачу (1) *Ax=в*. Примем $\varphi_1,...,\varphi_n$ за базис в R^n. Тогда

$$в = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i, \quad x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i.$$

Поэтому,

$$c_i = \frac{\beta_i}{\lambda_i}. \tag{27}$$

Если матрица *A* плохо обусловлена, то среди λ_i имеются относительно малые числа такие, что малым изменениям β_i будут соответствовать недопустимо большие изменения c_i. Можно сказать, что решение задачи (1) недопустимо искажается в направлении векторов φ_i, соответствующих малых λ_1. Из (27) также вытекает и то любопытное обстоятельство, что выше указанного искажения может и не быть, если вектор правых частей $\hat{a}$ ортогонален (или почти ортогонален) «плохим» векторам φ_i. Действитель- но, в этом случае имеем

$$\beta_i = (в, \varphi_i) = 0 \quad или \quad \beta_i \approx 0.$$

Бороться с искажением решения в направлениях векторов φ_i, соответствующих малым λ_i, можно следующим образом (метод регуляризации). Зададимся некоторым ε и вместо (1) рассмотрим систему

$$(\varepsilon \mathrm{E} + A)x_\varepsilon = в. \tag{28}$$

Тогда вместо (27) получим

$$c_{i\varepsilon} = \frac{\beta_i}{\lambda_i + \varepsilon}. \tag{29}$$

Если

$$\|x\|^2 = (x,x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right)^2,$$

$$\|x_\varepsilon\|^2 = (x_\varepsilon, x_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} c_{i\varepsilon}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\lambda_i + \varepsilon}\right)^2,$$

и для всех $i : \lambda_i + \varepsilon \neq 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|x_\varepsilon\| = \|x\|.$$

Далее, поскольку

$$c_i - c_{i\varepsilon} = \frac{\varepsilon \beta_i}{\lambda_i(\lambda_i + \varepsilon)},$$

то для больших λ_i введение параметра ε не оказывает существенного влияния на c_i. Если $\lambda_i \prec \varepsilon$, то

$$|c_{i\varepsilon}| = \left|\frac{\beta_i}{\lambda_i + \varepsilon}\right| \prec\prec \left|\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right| = |c_i|, \tag{30}$$

и вклад искаженных слагаемых, соответствующих малым λ_i, теперь весьма незначителен. Однако, в силу (29), (30) основная проблема теперь заключается в выборе оптимального значения параметра регуляризации ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

2. Пантина И.В. Вычислительная математика: учебник / И.В. Пантина, А.В. Синчуков. – М.: МФПУ Синергия, 2012. – 176 с.

3. Андреев Г.Н. Вычислительная математика / Г.Н. Андреев. – М.: МГИУ, 2007. – 166 с.

4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В.И. Лебедев. – М.: Физматлит, 2005. – 296 с.

REFERENCES

1. Voevodin V.V., *Vychislitelnye osnovy lineinoi algebry.* V.V. Voevodin, M*., Nauka,* ***1977****, 304 (in Russ).*

2. Pantina I.V., Sinchukov A.V., *Vychislitelnaya matematika.* I.V. Pantina, A.V. Sinchukov, *Uchebnik,* M*.,* M*FPU Sinergia,* ***2012****, 176 (in Russ).*

3. Andreev G.N., *Vychislitelnaya matematika.* G.N. Andreev, M*.,* M*GIU,* ***2007****, 166 (in Russ).*

4. Lebedev V.I., *Funkcionalnyi analiz i vychislitelnaya matematika.* V.I. Lebedev, M*.: Fizmatlit,* ***2005,*** *296 (in Russ).*

ӘОЖ 537.86

А.С. МҰХАТАЕВА, Г.С. БЕКТАСОВА

С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті,
Өскемен қ., Қазақстан

КОММУНИКАЦИЯ ҚҰРАЛДАРЫНЫҢ ЭЛЕКТРОМАГНИТТІК ӨРІСІ АДАМДАРДЫҢ ЕСТЕ САҚТАУ ҚАБІЛЕТІНЕ ӘСЕРІ

Мақалада электромагниттік өріс тұрмыстық аспаптар мен коммуникация құралдарының адам денсаулығына әсері туралы деректер жинақталған. Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымының электромагниттік өрісті қауіпті фактор ретінде мойындағаны кездейсоқ емес екендігі көрсетілген.

Түйін сөздер: электромагниттік өріс, адам денсаулығы, қоршаған орта, заманауи құралдар.

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И СРЕДСТВ КОММУНИКАЦИЙ НА ПАМЯТЬ ЧЕЛОВЕКА

В данной статье собраны данные о влиянии электромагнитных полей бытовых приборов и средств коммуникаций на здоровье человека. Показано что неслучайно всемирная организация здравоохранения признала электромагнитное поле опасным фактором.

Ключевые слова: электромагнитное поле, здоровье человека, окружающей среды, современные средства.

THE ELECTROMAGNETIC FIELDS INFLUENCE COMMUNICATIONS IN MEMORY OF PEOPLES

In this article, we have collected data on the impact of electromagnetic fields of household appliances and communication tools in human health. It is shown that it is no coincidence that the world health organization has recognized electromagnetic field threat factor.

Keywords: electromagnetic field, human health, the environment, modern tools.