УДК 519.6

Ф.С. АМЕНОВА, Ш.А. УАЛЬЖАНОВА

Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова,
г. Усть-Каменогорск, Қазахтан

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПЕРЕМЕННЫХ «ФУНКЦИЯ ТОКА-ВИХРЬ СКОРОСТИ»

Методом априорных оценок исследованы вопросы сходимости решения итерационных алгоритмов с краевыми условиями Вудса для решения системы одномерных сеточных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «функция тока-вихрь скорости». Получены оценки скорости сходимости итерационных алгоритмов. Для нахождения решения операторно-разностной задачи рассмотрен итерационный алгоритм расщепления. Проведены численные эксперименты на примере модельной задачи. Проведен сравнительный анализ теоретических и экспериментальных результатов исследования итерационных алгоритмов с краевыми условиями Вудса с краевыми условиями Тома.

Ключевые слова: разностная задача, функция тока, вихрь скорости, итерационный алгоритм, оценка скорости сходимости.

«АҒЫН ЖӘНЕ ҚҰЙЫН» АЙНЫМАЛЫЛАРЫНДАҒЫ БІРӨЛШЕМДІ ТОРЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

Бұл жұмыста шекаралық шарттары Вудс формуласымен берілген «ағын және құйын» айнымалыларында сипатталған сығылмайтын сұйықтықтардың бірөлшемді торлық теңдеулер жүйесін шешу үшін қарастырылған итерациялық алгоритмдердің жинақтылық қасиеттері априорлық бағалау әдісі арқылы зерттелген. Қарастырылған итерациялық алгоритмдер үшін жинақталу жылдамдықтары анықталған. Операторлы-айырымдық есепті шешу үшін ыдырату итерациялық алгоритмі қарастырылған. Модельді есеп мысалында эксперименттік жұмыстар жүргізілген. Шекаралық шарттары Том формулаларымен берілген және шекаралық шарттары Вудс формулаларымен берілген итерациялық алгоритмдердің теориялық және эксперименттік зерттеу нәтижелеріне салыстыру жұмыстары жасалынған.

Түйін сөздер: айырымдық есеп, ағын, құйын, итерациялық алгоритм, жинақтылық жылдамдығының бағасы.

SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL GRID EQUATIONS
IN «STREAM FUNCTION-VORTICITY» VARIABLES

Using the method of a priori estimates, the convergence of iterative algorithms with Woods' boundary conditions for the solution of one-dimensional grid incompressible fluid equations in «stream function-vorticity» variables are studied. Estimates of the rate of convergence of iterative algorithms are obtained. To find the solution of operator-difference problem, an iterative splitting algorithm is considered. Numerical experiments for a model problem are conducted. A comparative analysis of theoretical and experimental results of research of iterative algorithms with Woods› boundary conditions and Thom›s boundary conditions is conducted.

Keywords: difference problem, stream function, vorticity, iteration algorithms, estimation of convergence rate.

Одно из направлений численного исследования двумерных течений несжимаемой жидкости основывается на решении уравнений Навье-Стокса, записанные в переменных «функция тока, вихрь скорости» с применением различных способов задания граничных условий для вихря скорости [1-8]. Для определения вихря скорости на границе наиболее популярными аппроксимативными формулами являются формулы Тома и Вудса, имеющие первый и второй порядок точности соответственно [1, 2]. Теоретическим и практическим вопросам использования формулы Тома в расчетах течений несжимаемой жидкости посвящаются достаточное количество работ [4-8]. В работе [4] для двумерных уравнений Стокса доказана абсолютная устойчивость классических неявных разностных схем и предложены устойчивые прямые и итерационные методы решения разностных краевых задач методом операторных неравенств. В работе [5] на основе метода расщепления по физическим процессам предложен численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса, записанных в переменных «функция тока, вихрь скорости». Проведено исследование устойчивости по линейному приближению разностных схем. В работе [6] исследованы вопросы сходимости одномерных сеточных уравнений для несжимаемой жидкости в переменных «функция тока, вихрь скорости» с краевыми условиями для вихря скорости по формуле Тома. Теоретические результаты по исследованию применения формулы Вудса для вычисления на границе значений вихря скорости для уравнений несжимаемой жидкости фактически отсутствуют.

В данной работе на примере модельной одномерной сеточной задачи для несжимаемой жидкости в переменных «функция тока-вихрь скорости» рассмотрены итерационные алгоритмы с краевыми условиями Вудса. Проведены исследования на сходимость решений итерационных алгоритмов к решению разностной задачи и получены оценки скорости сходимости итерационных алгоритмов. Проведен сравнительный анализ теоретических и экспериментальных результатов исследования итерационных алгоритмов для решения системы одномерных сеточных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «функция тока-вихрь скорости» с краевыми условиями Тома и с краевыми условиями Вудса.

Постановка задачи и вопросы ее решения. В сеточной области $\overline{D}_h = \left\{x_k = k\,h,\ k = \overline{0,N}\right\}$ рассмотрим одномерную разностную задачу для несжимаемой жидкости следующего вида [7]

$$\omega_{\bar{x}x,k} + f\left(x_k\right) = 0, \tag{1}$$

$$\psi_{\bar{x}x,k} = \omega_k,\ k = \overline{1,N-1}, \tag{2}$$

$$\psi_0 = \psi_N = 0, \tag{3}$$

С краевыми условиями для вихря скорости по формуле Вудса [1]

$$\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_1 = \frac{3}{h}\psi_{x,0},\ \ \omega_N + \frac{1}{2}\omega_{N-1} = -\frac{3}{h}\psi_{\bar{x},N}\,. \tag{4}$$

Для численного решения разностной задачи (1)-(4) рассмотрим явный итерационный алгоритм следующего вида (**Алгоритм BI**):

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\tau} = \omega^n_{\bar{x}x,k} + f_k, \tag{5}$$

$$\psi^{n+1}_{\bar{x}x,k} = \omega_k^{n+1},\ k = \overline{1,N-1}, \tag{6}$$

$$\psi_0^{n+1} = \psi_N^{n+1} = 0,\ \ \psi_k^0 = \psi_0(k\,h),\ \ k = \overline{0,N}, \tag{7}$$

$$\omega_0^{n+1} + \frac{1}{2}\omega_1^{n+1} = \frac{3}{h}\psi^{n+1}_{x,0},\ \omega_N^{n+1} + \frac{1}{2}\omega_{N-1}^{n+1} = -\frac{3}{h}\psi^{n+1}_{\bar{x},N}\,. \tag{8}$$

Исследуем вопрос о сходимости решения итерационного алгоритма (5)-(8) к решению разностной задачи (1)-(4).

Введем следующие обозначения:

$$\left(u,v\right) = \sum_{k=1}^{N-1} u_k v_k h,\quad \left(u,v\right] = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k h,\quad \left\|u\right\|^2 = \left(u,u\right),\quad \left\|u\right\|^2_{(1)} = \left(u,u\right],$$

где $\forall\, u \in \overset{0}{\Omega}_h(D_h)$, $\overset{0}{\Omega}_h(D_h)$ – пространство одномерных сеточных функций, имеющих нулевые значения на граничных точках разностной сетки D_h,

$$z_k^n = \omega_k^n - \omega_k,\ \ \varphi_k^n = \psi_k^n - \psi_k,$$

здесь, ω_k, ψ_k – решение задачи (1)-(4), ω_k^n, ψ_k^n – значения итераций (5)-(8), вычисленные в узлах сетки D_h. Далее, также будем использовать другие общепринятые обозначения и известные неравенства из теории разностных схем [7], например,

$$\delta_0\|u\|^2 \le \|u_{\bar{x}}\|_{(1)}^2 \le \frac{4}{h^2}\|u\|^2,\ \delta_0 = 4(\sin(\pi h/2)/h)^2.$$

Для погрешностей итераций имеем следующие соотношения

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} = z_{x\bar{x},k}^n, \tag{9}$$

$$\varphi_{x\bar{x},k}^{n+1} = z_k^{n+1},\ \ k = \overline{1, N-1}, \tag{10}$$

$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_N^{n+1} = 0,$$

$$z_0^{n+1} + \frac{1}{2} z_1^{n+1} = \frac{3}{h}\varphi_{x,0}^{n+1},\ z_N^{n+1} + \frac{1}{2} z_{N-1}^{n+1} = -\frac{3}{h}\varphi_{\bar{x},N}^{n+1}. \tag{11}$$

Соотношение (9) умножим на $2\tau\varphi^{n+1}$ и просуммируем по узлам сетки D_h. В результате можно получить следующее энергетическое тождество:

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\varphi_{\bar{x}}^n\right\|^2 + \left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n\right\|^2 + 2\tau\left(z_0^n\varphi_{x,0}^{n+1} - z_N^n\varphi_{\bar{x},N}^{n+1}\right) + 2\tau\left(\varphi_{x\bar{x}}^n, \varphi_{x\bar{x}}^{n+1}\right) = 0.$$

Учитывая краевые условия (11) и применяя несложные преобразования имеем:

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\varphi_{\bar{x}}^n\right\|^2 + \left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1} - \varphi_{\bar{x}}^n\right\|^2 + \frac{\tau h}{2}\left(\left|z_0^n\right|^2 + \left|z_N^n\right|^2\right) + \frac{\tau h}{6}\left[\left(z_1^n + z_0^n\right)^2 + \left(z_N^n + z_{N-1}^n\right)^2\right] -$$

$$-\frac{\tau h}{6}\left(\left|z_1^n\right|^2 + \left|z_{N-1}^n\right|^2\right) + 2\tau\left[z_0^n\left(\varphi_{x,0}^{n+1} - \varphi_{x,0}^n\right) - z_N^n\left(\varphi_{\bar{x},N}^{n+1} - \varphi_{\bar{x},N}^n\right)\right] +$$

$$+\tau\left[\left\|\varphi^{n}_{x\bar{x}}\right\|^2+\left\|\varphi^{n+1}_{x\bar{x}}\right\|^2-\left\|\varphi^{n+1}_{x\bar{x}}-\varphi^{n}_{x\bar{x}}\right\|^2\right]=0$$

Используя известные неравенства получим:

$$\left\|\varphi^{n+1}_{\bar{x}}\right\|^2-\left\|\varphi^{n}_{\bar{x}}\right\|^2+\left(1-\frac{6\tau}{h^2}\right)\left(\left|\varphi^{n+1}_{\bar{x},0}-\varphi^{n}_{\bar{x},0}\right|^2+\left|\varphi^{n+1}_{\bar{x},N}-\varphi^{n}_{\bar{x},N}\right|^2\right)h+$$

$$+\left(1-\frac{4\tau}{h^2}\right)\sum_{k=2}^{N-2}\left|\varphi^{n+1}_{\bar{x}}-\varphi^{n}_{\bar{x}}\right|^2h+\tau\left\|\varphi^{n+1}_{x\bar{x}}\right\|^2+\frac{5\tau h}{6}\left(\left|z^n_1\right|^2+\left|z^n_{N-1}\right|^2\right)+\tau\sum_{k=2}^{N-2}\left|\varphi^{n}_{x\bar{x}}\right|^2h\le 0\,.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$1-\frac{6\tau}{h^2}\ge 0 \qquad (12)$$

имеем следующие неравенства:

$$\left\|\varphi^{n+1}_{\bar{x}}\right\|^2-\left\|\varphi^{n}_{\bar{x}}\right\|^2+\frac{5\tau}{6}\delta_0\left(\left\|\varphi^{n+1}_{\bar{x}}\right\|^2+\left\|\varphi^{n}_{\bar{x}}\right\|^2\right)\le 0\,,$$

$$\left\|\varphi^{n+1}_{\bar{x}}\right\|\le q\left\|\varphi^{n}_{\bar{x}}\right\|,$$

где

$$q=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}<1,\ \beta=\frac{5\tau\,\delta_0}{6}<1\,,$$

то есть, итерации по алгоритму (5)-(8) сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$. При этом можно гарантировать, что величина $q^n\le\varepsilon$ где ε – число, характеризующее точность итерации, если

$$n\ge n_0(\varepsilon)\approx O(\frac{1}{h^2})l\,n\frac{1}{\varepsilon}. \qquad (13)$$

В работе [7] было доказано, что итерации Алгоритма I с краевыми условиями по формуле Тома сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q=\sqrt{\frac{1-\tau\,\delta_0}{1+\tau\,\delta_0}}<1\ .$$

Сравнивая выражения знаменателей геометрических прогрессий при использовании краевых условий Тома и при использовании краевых условий Вудса можно увидеть, что они по значению очень близки. Также сравнивая число итераций $n_0(\varepsilon)$ из Теоремы 1, полученное при исследовании явного итерационного алгоритма Ic краевыми условиями в виде формул Тома [7] и число итераций(13) можно заключить, что принципиальных различий в числах итераций нет, и в обоих случаях решения итерационных алгоритмов сходятся почти одинаково.

Далее, для решения разностной задачи (1)-(4) рассмотрим неявный итерационный алгоритм следующего вида **(Алгоритм BII)**

$$\frac{\omega_k^{n+1}-\omega_k^n}{\tau}=\omega_{\bar{x}x,k}^{n+1}+f_k, \tag{14}$$

$$\psi_{\bar{x}x,k}^{n+1}=\omega_k^{n+1},\ k=\overline{1,N-1}\ , \tag{15}$$

$$\psi_0^{n+1}=\psi_N^{n+1}=0,\ \psi_k^0=\psi_0(kh),\ \ k=\overline{0,N},$$

$$\omega_0^{n+1}+\frac{1}{2}\omega_1^{n+1}=\frac{3}{h}\psi_{x,0}^n,\ \ \omega_N^{n+1}+\frac{1}{2}\omega_{N-1}^{n+1}=-\frac{3}{h}\psi_{\bar{x},N}^n\ . \tag{16}$$

Для погрешностей итераций имеем следующие соотношения:

$$\frac{z_k^{n+1}-z_k^n}{\tau}=z_{\bar{x}x,k}^{n+1}, \tag{17}$$

$$\varphi_0^{n+1}=\varphi_N^{n+1}=0,$$

$$\varphi_{\bar{x}x,k}^{n+1}=z_k^{n+1},\qquad k=\overline{1,N-1}, \tag{18}$$

$$z_0^{n+1}+\frac{1}{2}z_1^{n+1}=\frac{3}{h}\varphi_{x,0}^n,\ z_N^{n+1}+\frac{1}{2}z_{N-1}^{n+1}=-\frac{3}{h}\varphi_{\bar{x},N}^n\ . \tag{19}$$

Соотношение (18) скалярно умножим на $2\tau\varphi^{n+1}$ и просуммируем по узлам сетки. Используя формулы суммирования, получим энергетическое тождество:

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2-\left\|\varphi_{\bar{x}}^n\right\|^2+\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}-\varphi_{\bar{x}}^n\right\|^2+2\tau\left\|\varphi_{\bar{x}x}^{n+1}\right\|^2+\frac{\tau h}{2}\left(\left|z_0^{n+1}\right|^2+\left|z_N^{n+1}\right|^2\right)-$$

$$-\frac{\tau h}{6}\left(\left|z_1^{n+1}\right|^2+\left|z_{N-1}^{n+1}\right|^2\right)+\frac{\tau h}{6}\left[\left(z_0^{n+1}+z_1^{n+1}\right)^2+\left(z_N^{n+1}+z_{N-1}^{n+1}\right)^2\right]+$$

$$+2\tau\Big(z_0^{n+1}(\varphi_{x,0}^{n+1}-\varphi_{x,0}^{n})-z_N^{n+1}(\varphi_{\bar{x},N}^{n+1}-\varphi_{\bar{x},N}^{n})\Big)=0$$

Используя ε – неравенство, получим

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2-\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n}\right\|^2+\left(1-\frac{2\tau}{h^2}\right)\left(\left|\varphi_{x,0}^{n+1}-\varphi_{x,0}^{n}\right|^2+\left|\varphi_{\bar{x},N}^{n+1}-\varphi_{\bar{x},N}^{n}\right|^2\right)h+\sum_{k=2}^{N-1}\left|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}-\varphi_{\bar{x}}^{n}\right|^2 h+$$

$$+2\tau\left\|\varphi_{\bar{x}x}^{n+1}\right\|^2-\frac{\tau h}{6}\left(\left|z_1^{n+1}\right|^2+\left|z_{N-1}^{n+1}\right|^2\right)\le 0\,.$$

При выполнении условия

$$1-\frac{2\tau}{h^2}\ge 0 \qquad (20)$$

имеем следующие неравенства

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2-\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n}\right\|^2+\frac{11\tau\,\delta_0}{6}\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2\le 0\,,$$

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|\le q\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n}\right\|,\ \text{где}\ q=\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{11\tau\ldots\delta_0}{6}}}<1\,,$$

то есть, итерации по алгоритму (14)-(17) сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$ и для $n_0(\varepsilon)$ справедливо соотношение

$$n\ge n_0(\varepsilon)\approx O(\frac{1}{h^2})l\,n\frac{1}{\varepsilon}. \qquad (21)$$

При исследовании алгоритма BII с краевыми условиями Тома [7], знаменатель геометрической прогрессии имел следующий вид:

$$q=\sqrt{\frac{1}{1+2\tau\,\delta_0}}<1\,.$$

Сравнивая результаты исследовании неявного итерационного алгоритма I с краевыми условиями Тома [7] и алгоритма BII с краевыми условиями Вудса можно сделать такие же выводы, как и в предыдущем явном случае.

Из вышеизложенного видим, что использование краевых условий Вудса накладывает ограничения на выбор итерационных параметров. Для решения этой проблемы в данной работе рассмотрена операторно-разностная задача [1, 2], для которой рассмотрена итерационная схема, аналогичная схеме расщепления, исследованная в работе [6]. Непосредственное использование краевых условий Вудса для численной реализации разностных уравнений (1), (2) приводит к необходимости проведения процедуры релаксации граничных значений. В отсутствии данной процедуры при соблюдении практических условий устойчивости обнаруживается расходимость итерационных схем. Наиболее современные итерационные методы используются для разностных уравнений (1) и (2), получаемые из введения вспомогательной функции вихря скорости с однородными краевыми условиями на границе [4]. Следуя этому, введем вспомогательную функцию вихря скорости по формуле

$$\overline{\omega}_k = \begin{cases} \omega_0 + \dfrac{3}{h}\psi_{x,0} = 0, & k = 0, \\ \omega_k, & k = \overline{1, N-1}, \\ \omega_N - \dfrac{3}{h}\psi_{\bar{x},N} = 0, & k = N, \end{cases}$$

и систему алгебраических уравнений (1), (2) для функций ($\overline{\omega}, \psi$) запишем в виде

$$\overline{\omega}_{x\bar{x},k} + A_h\psi_k + f_k = 0, \qquad (22)$$

$$\psi_{x\bar{x},k} = \overline{\omega}_k, \; k = \overline{1, N-1}, \qquad (23)$$

с краевыми условиями следующего вида

$$\psi_0 = \psi_N = 0, \; \overline{\omega}_0 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1 = 0, \quad \overline{\omega}_N + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{N-1} = 0. \qquad (24)$$

Здесь $A_h\psi_k = \dfrac{3}{h^4}(\delta^{k,1} + \delta^{k,N-1})\psi_k$, $\delta^{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$

Для нахождения решения операторно-разностной задачи (22)-(24) рассмотрим итерационный алгоритм следующего вида **(Алгоритм BIII)**

$$\frac{\overline{\omega}_k^{n+1/2} - \overline{\omega}_k^{n}}{\tau} = \overline{\omega}_{x\bar{x},k}^{n} + A_h\psi_k^{n+1/2} + f_k, \qquad (25)$$

$$\psi_{x\bar{x},k}^{n+1/2} = \overline{\omega}_k^{n+1/2}, \; k = \overline{1, N-1}, \qquad (26)$$

$$\frac{\overline{\omega}_k^{n+1} - \overline{\omega}_k^{n}}{\tau} = \overline{\omega}_{x\bar{x},k}^{n+1} + A_h \psi_k^{n+1/2} + f_k, \tag{27}$$

$$\psi_{x\bar{x},k}^{n+1} = \overline{\omega}_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{28}$$

с краевыми условиями

$$\psi_0^{n+1/2} = \psi_N^{n+1/2} = 0, \quad \psi_0^{n+1} = \psi_N^{n+1} = 0,$$

$$\overline{\omega}_0^{n+1/2} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1^{n+1/2} = 0, \quad \overline{\omega}_N^{n+1/2} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{N-1}^{n+1/2} = 0,$$

$$\overline{\omega}_0^{n+1} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1^{n+1} = 0, \quad \overline{\omega}_N^{n+1} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_{N-1}^{n+1} = 0, \tag{29}$$

В работе [7] был исследован итерационный алгоритм расщепления с краевыми условиями Тома, аналогичный алгоритму (25)-(29). Получена оценка скорости сходимости, определено оптимальное значение итерационного параметра τ. Такие теоретические результаты для итерационного алгоритма расщепления (25)-(29), при применении формулы Вудса, нами еще не получены. Для проверки эффективности предлагаемого алгоритма расщепления (25)-(29) был проведен численный эксперимент на модельном примере.

Для проведения численных экспериментов рассмотрим модельную дифференциальную задачу следующего вида:

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = 24, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \omega, \quad 0 < x < 1, \tag{30}$$

с краевыми условиями $\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0, \psi'(0) = 0, \quad \psi'(1) = 0,$ при $x = 0, 1$. (31)

Решение задачи (30)-(31) имеет вид $\psi(x) = x^2(1-x)^2, \quad \omega(x) = 12x^2 - 12x + 2$.

Результаты проведенных экспериментов для модельного примера (30)-(31) показывают, что полученные условия сходимости (12) и (20) для итерационных алгоритмов с краевыми условиями Вудса (Алгоритм BI, Алгоритм BII) и условия Теоремы 1 и Теоремы 2, полученные при теоретическом исследовании итерационных алгоритмов с краевыми условиями Тома [6] верны. Данные по количеству итераций для итерационного алгоритма (5)-(8), при $\varepsilon = 0.000001$ и различных параметров расчетной сетки τ и h, приведенные на таблице 1, показывают, что прямое использование краевых условий Вудса накладывает ограничения на выбор итерационных параметров τ и h. То есть разработка эффективных вычислительных алгоритмов для решения задач несжимаемой жидкости является актуальной.

Таблица 1 – Количества итераций АлгоритмаBI

τ	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128	h=1/256	h=1/512
0,001	279	-	-	-	-	-
0,0001	2369	2417	2714	-	-	-
0,00001	18457	19138	19987	21203	-	-
0,000001	122469	131790	140384	149280	159002	170718

Далее проведенные численные эксперименты показывают, что итерационный алгоритм (25)-(29) и итерационный алгоритм расщепления, рассмотренный в работе [7], практически являются абсолютно устойчивыми, что позволяет проводить расчеты с большими значениями итерационного параметра τ и с любыми значениями итерационного параметра h. В таблице 2, при $\varepsilon = 0.000001$, при различных параметрах расчетной сетки τ и h, приведены данные по количеству итерации для итерационного алгоритма (25)-(29) при достижении критерия

$$\left\| \overline{\omega}_{x\bar{x},k} + A_h \psi_k + f_k \right\|_{L_2(D_h)} \le \varepsilon \ .$$

Таблица 2 – Количества итераций АлгоритмаBIII

τ	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128	h=1/256	h=1/512
0,5	11	11	11	11	11	12
0,1	21	22	23	23	25	25
0,01	70	89	110	129	145	145
0,001	332	369	432	539	702	875
0,0001	2403	2550	2659	2870	3176	3617

Сравнивая результаты численного решения с точным решением модельной задачи (30)-(31) можно заключить, что лучшие результаты достигаются при использовании формулы Вудса. Например, при значениях $\varepsilon = 0.000001$, $\tau = 0.0001$ и *h=1/16* при использовании формулы Вудса максимальная погрешность не превышает значения 0,001391, а при использовании формулы Тома максимальная погрешность равна значению 0,002528. Также результаты исследованных алгоритмов для численного решения уравнений несжимаемой жидкости позволяют сделать следующий вывод: для устойчивости и сходимости разностных схем имеют существенное влияние краевые условия для вихря скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вабищевич П.Н. Реализация краевых условий при решении уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока-вихрь скорости» / П.Н. Вабищевич // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273(1). – С. 22-26.

2. Воеводин А.Ф. Об устойчивости разностных граничных условий для функции вихря на твердой стенке / А.Ф. Воеводин // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – №5. – С. 855-859.

3. Данаев Н.Т. Об одной методике численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных (ψ,ω) / Н.Т. Данаев, Ш. Смагулов // Моделирование в механике. – 1991. – Т. 5(22). – №4. – С. 38-47.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

5. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин. – Иркутск: Изд. Иркут. ун-та, 1990. – 228 с.

6. Том А. Числовые расчеты полей в технике и физике / А. Том, К. Эйплт. – М.: Энергия, 1964. – 208 с.

7. Danaev N., Amenova F. Aboutone Method to Solve Navier-Stokesin Variables (Ψ,Ω) // Advancesin Mathematical and Computational Methods, 2013. – №3:2. – 72-78 pp.

8. Gottlieb S., Tone F., Wang C., Wang X., Wirosoetisno D. // Long Time Stability of a Classical Efficient Scheme for Two-dimensional Navier-Stokes Equations, SIAM J. Numer. Anal., 2012. – №50(1). – 126-150 pp.

REFERENCES

1. Vabishhevich P.N., *Realizacija kraevyh uslovij pri reshenii uravnenij Nav'e Stoksa v peremennyh funkcija toka-vihr' skorosti, Dokl.AN SSSR.* ***1983,*** *273, 1, 22-26 (in Russ).*

2. Voevodin A.F., *Ob ustojchivosti raznostnyh granichnyh uslovij dlja funkcii vihrja na tverdoj stenke. Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.,* ***1998,*** *T. 38, 5, 855-859 (in Russ).*

3. Danaev N.T., Smagulov Sh., *Ob odnoj metodike chislennogo reshenija uravnenij Nav'e-Stoksa v peremennyh. Modelirovanie v mehanike,* ***1991,*** *T. 5, 22, 4, 38-47 (in Russ).*

4. Samarskij A.A., *Teorija raznostnyh shem. M. Nauka,* ***1983,*** *616 (in Russ).*

5. Tarunin E.L., *Vychislitel'nyj jeksperiment v zadachah svobodnoj konvekcii. Irkutsk, Izd.Irkut.un.ta,* ***1990,*** *228 (in Russ).*

6. Tom A., Jejplt K., *Chislovye raschety polej v tehnike i fizike. M., Jenergija,* ***1964.*** *208 (in Eng).*

7. Danaev N., Amenova F. *Aboutone Method to Solve Navier-Stokesin Variables. Advancesin Mathematical and Computational Methods,* ***2013,*** *3:2, 72-78 (in Russ).*

8. Gottlieb S., Tone F., Wang C., Wang X., Wirosoetisno D., *Long Time Stability of a Classical Efficient Scheme for Two dimensional Navier Stokes Equations, SIAM J. Numer. Anal.,* ***2012,*** *50, 1. 126-150 (in Eng).*

УДК 004.4

А.И. ЕРЁМИН, А.Р. СЫЗДЫКПАЕВА

Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан

РАЗРАБОТКА МУЛЬТИТАЧ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ITABLE

В данной статье представлено разрабатываемое мультитач приложение для сенсорного стола в виде интерактивной карты Казахстана. Также освещается значимость использования современных MultiTouch технологий в образовательном процессе. Приведены преимущества использования интерактивного оборудования.

Ключевые слова: MultiTouch технологии, информационные технологии, сенсорный стол, интерактивная карта.

ITABLE-ГЕ АРНАЛҒАН МУЛЬТИТАЧ ҚОСЫМШАСЫНЫҢ ӘЗІРЛЕМЕСІ

Бұл мақалада әзірленіп жатқан мультитач қосымшасы сенсорлық үстел үшін Қазақстанның интерактивтік картасы түрінде көрсетілген. Заманауи MultiTouch технологиясын білім беру процесінде қолдану маңыздылығы көрсетіледі. Интерактивті құрылғыны қолданудың артықшылықтары сипатталды.

Түйін сөздер: MultiTouch технологиясы, ақпараттық технология, сенсорлық үстел, интерактивтік карта.

DEVELOPMENT MULTITOUCH APPLICATIONS FOR ITABLE

This article presents a multitouch application developed for the touch table in the form of an interactive map of Kazakhstan. Also highlights the importance of using modern MultiTouch technologies in the educational process. Advantages of using interactive equipment are given.

Keywords: MultiTouch technology, information technology, touch table, interactive map.

Возможность непосредственного управления объектами на экране при помощи только рук, исключая вспомогательные устройства – сенсорные коврики, указатели или стилосы, имеет очень большое значение в развитии современных информационных технологий. Такой вид управления привлекателен для многих пользователей. Интуитивность и здравый смысл в действиях, адекватность